1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique : corrigé du test 5

Version 30 novembre 2015

Corrigé du test 5 du 07-12-2015

Calculer (si c'est possible) les intégrales suivantes

$$(a) \int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \qquad\qquad (b) \int_1^{+\infty} \frac{e^{3x}}{x^3}\,dx$$

Solution.
(a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{\sqrt{4-x^2}}$ est continue sur $A = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 > 0\} =]-2, 2[$, donc sur $[0, 1]$ fermé borné. Par conséquent, elle y est intégrable.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= -2\int_0^1 (-2x)(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}\,dx = -2\int_0^1 D(4-x^2)(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}\,dx\\ &= -2.2\left[\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = -4\left(\sqrt{4-1}-\sqrt{4}\right) = -4\left(\sqrt{3}-2\right) = 4\left(2-\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

(b) La fonction $x \mapsto \frac{e^{3x}}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$, donc sur $[1, +\infty[$, ensemble non borné. Pour vérifier la non-intégrabilité de la fonction en $+\infty$, on peut utiliser le critère de NON intégrabilité.
Comme la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, calculons la limite suivante

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} \,.\, x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = +\infty$$

puisque, à l'infini, la fonction exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste. Puisque cette limite existe et est différente de 0, la fonction n'est pas intégrable sur l'intervalle.

Corrigé du test 5 du 08-12-2015

Calculer (si c'est possible) les intégrales suivantes

$$(a) \int_1^{e} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}\,dx \qquad\qquad (b) \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Solution.
(a) La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc sur $[1, e]$ fermé borné. Par conséquent, elle y est intégrable. Vu la propriété des puissances naturelles des logarithmes de réels strictement positifs, on a

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}dx &= \int_1^e \frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^e \ln(x)D(\ln(x))dx\\ &= \frac{1}{4}\left[\ln^2(x)\right]_1^e = \frac{1}{4}\left(\ln^2(e)-\ln^2(1)\right) = \frac{1}{4}((1)^2-0) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, +\infty[$, ensemble non borné. Pour vérifier la non-intégrabilité de la fonction en $+\infty$, on peut utiliser le critère de NON intégrabilité.
Comme la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, calculons la limite suivante

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+1} \,.\, x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.$$

Puisque cette limite existe et est différente de 0, la fonction n'est pas intégrable sur l'intervalle.